О.И. Тескин и др.

М/у
К выполнению д/з
по теории вероятностей
и мат. статистике

Часть I

ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего методического пособия – помощь студентам в решении тех типов задач по теории вероятностей и математической статистике, которые включены в домашнее задание (ДЗ) и предлагаются на зачетах и контрольных работах.

В первой части пособия приведены пять задач ДЗ – четыре по теории вероятностей и одна по математической статистике. Каждая содержит 30 вариантов.

Во второй части пособия даются методические указания к выполнению ДЗ. В них кратко излагается теория и решаются типовые задачи соответствующего раздела с подробным объяснением.

В приложении приводятся таблицы основных распределений: нормального, Стьюдента, Пирсона, Фишера.

В задачах ДЗ отражены такие разделы курса:

алгебра событий, теоремы сложения и умножения, комбинаторика (задача № 1);

формулы полной вероятности и Байеса, схема испытаний Бернулли (задача № 2);

числовые характеристики случайных векторов, функциональные преобразования случайных величин (задача № 3);

закон больших чисел в различных формулировках, предельные теоремы (задача № 4);

доверительные интервалы и проверка статистических гипотез (задача № 5).

Часть 1. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Задача № 1

Вариант 1. В здании главного корпуса МВТУ на 2-м этаже вошли в лифт 6 человек. От 3-го до 11-го этажа лифт может остановиться на любом этаже. Какова вероятность того, что все пассажиры вышли на разных этажах, если всевозможные варианты выхода пассажиров равновероятны ?

Вариант 2. В урне 20 белых и 5 красных шаров. Одновременно из урны извлекаются 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белого цвета? Какова вероятность того, что оба они разного цвета?

Вариант 3. На 6 карточках написаны буквы Е,И,С,С,С,Я. Тщательно перемешав карточки, извлекают их одну за другой и кладут в порядке извлечения. Определить вероятность того, что составится слово "сессия".

Вариант 4. При подготовке к зачету студент выучил 15 вопросов из 25, входящих в программу. Зачет считается сданным, если студент ответил на 3 заданных вопроса. Какова вероятность сдачи зачета?

Вариант 5. В группе 30 студентов, из них 5 живут в общежитии. По списку наудачу отобраны 3 студента. Найти вероятность того, что один из них живет в общежитии.

Вариант 6. В барабане продавца билетов книжной лотереи 200 билетов, из них с выигрышами 20. Покупатель берет 3 билета. Какова вероятность того, что один билет окажется выигрышным?

Вариант 7. В урне "А" белых и "В" черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба будут белыми. Рассмотреть два случая:

1) первый шар возвращается в урну;
2) первый шар не возвращается в урну.

Вариант 8. В турпоходе участвуют "А" студентов одной группы и "В" студентов другой. Какова вероятность того, что двое случайно оказавшихся рядом студентов окажутся из разных групп? Предполагается, что студенты идут в один ряд.

Вариант 9. На десяти карточках записаны буквы, составляющие слово "астрономия". Какова вероятность того, что, выбрав наудачу пять из них, мы получим слово "мотор"? Рассмотреть два случая:

1) карточки расположены в порядке извлечения;
2) вынутые карточки можно переставлять.

Вариант 10. Кампания из 10 человек садится за круглый стол. С какой вероятностью 3 определенных лица окажутся рядом?

Вариант 11. Слово "тройка" составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами перемешиваются и из них по очереди извлекаются 4 карточки. Какова вероятность, что эти 4 карточки в порядке извлечения составят слово "крот"?

Вариант 12. Пассажир оставил вещи в автоматической камере хранения, а когда пришел их получать, вспомнил лишь, что в коде было число 23. Какова вероятность того, что он с первой попытки наберет нужный номер?

Вариант 13. В урне 1 белый и 5 черных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар и возвращают его обратно, после чего шары в урне перемешиваются. Выигрывает тот, кто первый извлечет белый шар. Какова вероятность того, что выиграет игрок, начинающий игру?

Вариант 14. Из урны, в которой 20 белых и 10 черных шаров, извлекают 3 шара (вынутый шар в урну не возвращается). Определить вероятность того, что среди вынутых шаров будет: 1) 2 белых; 2) не меньше чем 2 белых; 3) не больше чем 2 белых шара.

Вариант 15. В урне 1 белый и 5 черных шаров. Два игрока по очереди вынимают из урны шар, не возвращая его обратно. Выигрывает тот, кто первый извлекает белый шар. Какова вероятность того, что выиграет игрок, начинающий игру?

Вариант 16. На 8 карточках записаны буквы слова "интеграл". Какова вероятность того, что, выбрав наудачу 4 из них, мы получим слово "тигр"? Рассмотреть два случая: 1) карточки располагаются в порядке извлечения; 2) вынутые карточки можно переставлять.

Вариант 17. В группе из 30 человек 25 спорсменов-разрядников. Наугад выбирают 5 человек для сдачи норм ГТО. Какова вероятность того, что среди них не окажется ни одного спортсмена-разрядника?

Вариант 18. Для сдачи экзамена нужно правильно ответить не менее чем на 2 вопроса билета (в билете 3 вопроса). Какова вероятность, что студент сдаст экзамен, если из 30 вопросов он не выучил 3?

Вариант 19. Из 30 карточек с буквами русского алфавита наудачу выбираются 4 карточки. Какова вероятность того, что эти 4 карточки в порядке извлечения составят слово "небо"?

Вариант 20. Достаточным условием сдачи коллоквиума является ответ на 2 из 3 вопросов, предлагаемых преподавателем студенту. Студент не знает ответы на 8 вопросов из 45, которые могут быть предложены. Какова вероятность того, что студент сдаст коллоквиум?

Вариант 21. Партия из 100 деталей подвергается выборочному контролю. Условие непригодности всей партии – наличие хотя бы одной бракованной детали среди проверенных 5. Какова вероятность принять данную партию, если она содержит 5% неисправных деталей?

Вариант 22. По каналу связи передаются 10 сигналов (вероятность искажения каждого из них одинакова). Из-за помех 4 из них при приеме искажаются. Какова вероятность того, что из четырех любых принятых сигналов хотя бы один - искаженный?

Вариант 23. Большое количество партий, в 10 изделий каждая, проверяется следующим образом: партия принимается, если из 3 выбранных по случайному принципу изделий каждое отвечает стандарту. Если же хотя бы одно изделие из контролируемых нестандартное, то партия бракуется. Какова вероятность, что будет принята партия, в которой 2 нестандартных изделия?

Вариант 24. Для уменьшения общего количества игр 20 команд спортсменов по жребию разбиваются на 2 равные подгруппы. Определить вероятность того, что 2 наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

Вариант 25. Имеются 12 приборов, из них 9 проверенных и 3 непроверенных. Случайным образом выбирается 3 прибора. Определить вероятность того, что все выбранные приборы проверены.

Вариант 26. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются 3 карты. Определить вероятность того, что это будут тройка, семерка, туз.

Вариант 27. Какова вероятность угадать в спортлото 5 чисел? (Из 49 чисел, среди которых 6 выигрышных, выбираются случайным образом 6.)

Вариант 28. В "секретном"замке на общей оси имеется 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с написанными на них различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что их цифры образуют определенное четырехзначное число. Определить вероятность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть с первого раза.

Вариант 29. На карточках написаны буквы Т,Т,Т,И,И,Н,С,У. Какова вероятность того, что при последовательном извлечении карточек получится слово "институт"?

Вариант 30. Для уменьшения общего количества игр 20 команд спортсменов по жребию разбиваются на 2 равные подгруппы. Определить вероятность того, что 2 наиболее сильные команды окажутся в одной подгруппе.

Задача № 2

Вариант 1. На склад поступает продукция 3 заводов, причем от 1-го завода поступает 20%, от 2-го - 46%, от 3-го - 34% всей продукции. Известно, что нестандартная продукция на каждом заводе составляет в среднем соответственно 3%, 2%, 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие, оказавшееся нестандартным, изготовлено на 1-м заводе.

Вариант 2. Вероятность пробоя каждого из четырех конденсаторов в приборе равна 0,1. Вероятность выхода прибора из строя при пробое одного конденсатора равна 0,2; при пробое двух равна 0,4; при пробое трех равна 0,6, а при пробое всех четырех равна 0,9. Найти вероятность выхода прибора из строя.

Вариант 3. В группе из 20 человек 5 отличных, 9 хороших и 6 посредственных стрелков. При одном выстреле отличный стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9, хороший - с вероятностью 0,8, а посредственный - с вероятностью 0,7. Наугад выбранный стрелок выстрелил дважды, в результате отмечено одно попадание и один промах. Какой вероятнее всего это был стрелок: отличный, хороший или посредственный?

Вариант 4. Производятся испытания прибора. При каждом испытании прибор выходит из строя с вероятностью $p = 0,1$. После 1-го выхода из строя прибор ремонтируется, после 2-го он признается негодным. Найти вероятность того, что прибор окончательно выйдет из строя после 5 испытаний.

Вариант 5. Предохранитель в электрической цепи выходит из строя в четырех случаях:

1. При коротком замыкании в лампе (событие A) с вероятностью $P_1 = 0,6$.

2. При замыкании в обмотке трансформатора (событие B) с вероятностью $P_2 = 0,7$.

3. При пробое конденсатора (событие C) с вероятностью $P_3 = 0,9$.

4. При выходе напряжения сети за допустимые нормы (событие D) с вероятностью $P_4 = 0,4$.

Все события несовместны, и их априорные вероятности соответственно равны: $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,1$; $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$. Определить наиболее вероятную причину отказа предохранителя после того, как произошло это событие.

Вариант 6. Производится стрельба по цели тремя снарядами. Каждый снаряд попадает в цель с вероятностью $p = 0,7$ независимо от других. Цель поражается с вероятностью 0,5 при попадании одного снаряда, с вероятностью 0,7 при попадании двух и попало не менее 2 снарядов, и с вероятностью 0,6, если попал только 1 снаряд. Определить вероятность поражения самолета.

Вариант 21. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна можно разделить на 4 группы. К зернам 1-й группы принадлежат 96%, ко 2-й – 2%, к 3-й – 1%, к 4-й – 1% всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, в котором не менее 50 зерен, для семян 1-й группы составляет 0,5, для 2-й группы – 0,2, для 3-й группы – 0,18, для 4-й группы – 0,02. Определить вероятность того, что: 1) из наудачу взятого зерна вырастет колос, в котором не менее 50 зерен; 2) зерно было взято из 1-й группы зерен (при условии, что колос содержал 50 зерен).

Вариант 22. Вероятность выигрыша по лотерейному билету $p = 0{,}01$. Сколько билетов нужно приобрести, чтобы выигрыш был гарантирован с вероятностью $P_T = 0{,}9$?

Вариант 23. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При одновременном выстреле всех трех стрелков обнаружено одно попадание. Определите, какому стрелку принадлежит пробоина (по критерию максимальной апостериорной вероятности).

Вариант 24. Экзаменационные билеты содержат 50 различных вопросов. В каждом экзаменационном билете 2 вопроса. Чтобы сдать экзамен, студент должен ответить на оба вопроса билета. Сколько вопросов студент может себе "позволить" не знать, чтобы надеяться сдать экзамен с вероятностью 0,98?

Вариант 25. По воздушной цели ведут огонь 2 различные ракетные установки. Вероятность поражения цели 1-й установкой равна 0,85, а 2-й установкой – 0,9. Вероятность поражения цели обеими установками равна 0,99. Найти вероятность поражения цели, если известно, что 1-я установка срабатывает с вероятностью 0,8, а 2-я с вероятностью 0,7.

Вариант 26. Счетчик регистрирует частицы трех типов: A, B и C. Вероятность появления этих частиц такова: $P(A)=0{,}2$; $P(B)=0{,}5$; $P(C)=0{,}3$. Частицы каждого из этих типов счетчик улавливает с такой вероятностью: $p_1=0{,}8$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}4$. Счетчик отметил частицу. По критерию наибольшей вероятности определить, какая это была частица.

Вариант 27. Противник может применить ракеты типов A, B и C с такой вероятностью: $P(A)=0{,}3$; $P(B)=0{,}6$; $P(C)=0{,}1$. Вероятности сбить ракеты этих типов равны соответственно 0,6; 0,8; 0,9. Известно, что противник применил ракету одного из трех типов. Определить вероятность того, что ракета будет сбита. Если ракета сбита, то определить наиболее вероятный

ее тип.

Вариант 28. На ракетной установке ПВО имеется боезапас в 10 ракет. Вероятность поражения одной ракетой самолета противника равна 0,6. Чему равна вероятность уничтожения 3 самолетов противника, если каждый может быть сбит независимо от других?

Вариант 29. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 – хорошо, 4 – посредственно и 2 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, может ответить на все вопросы, подготовленный хорошо – на 35, посредственно – на 25, плохо – на 10 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на все 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: 1) отлично; 2) хорошо; 3) посредственно; 4) плохо.

Вариант 30. В продукции завода брак из-за дефекта A составляет 5%, причем среди забракованной по признаку A продукции в 6% случаев встречается дефект B, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект B встречается в 2% случаев. Определить вероятность нахождения дефекта B во всей продукции. При контроле установлено наличие в изделии дефекта B. Какова вероятность наличия при этом дефекта A?

Задача № 3

Вариант 1. Случайная величина X подчиняется распределению Релея

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } x\geq 0\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=\ln X$.

Вариант 2. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность распределения $f(y)$, если $Y=\mathrm{arctg}\,X$.

Вариант 3. Значения острого угла ромба со стороной a распределены равномерно в интервале $(0, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей площади ромба.

Вариант 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(y)$, если $Y=X^3$.

Вариант 5. Случайная величина X распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) & \text{при } |x|\le a\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(y)$ случайной величины $Y = b^2-X^2$, где $b>a$.

Вариант 6. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $[0,1]$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по показательному закону $f(y)=\lambda\exp(-\lambda y)$, $(y\ge 0)$?

Вариант 7. Закон распределения измеренного значения радиуса круга – нормальный, с математическим ожиданием $M=50$ и дисперсией $\sigma^2=0{,}25$. Найти закон распределения площади круга и его среднюю площадь.

Вариант 8. Найти закон распределения объема шара, если его радиус – случайная величина, имеющая нормальный закон распределения с математическим ожиданием $M=10$ и дисперсией $\sigma^2=0{,}25$.

Вариант 9. Найти плотность распределения вероятностей объема куба, ребро которого X – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $[0,a]$.

Вариант 10. Пусть X и Y – независимые случайные величины, плотность распределения вероятностей которых

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\ (0\le x<\infty),\quad f(y)=\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}\ (0\le y<\infty).$$

Найти $f(z)$, где $Z=X+Y$.

Вариант 11. Диаметр цилиндрического вала имеет погрешность изготовления, и потому его измеренное значение подчинено равномерному в интервале $[a,b]$ распределению. Найти плотность распределения вероятностей площади поперечного сечения вала.

Вариант 12. Определить плотность распределения вероятностей случайной величины X так, чтобы случайная величина $Y=\sqrt[n]{X}$ была распределена по нормальному закону с параметрами $M=0$, $\sigma=1$.

Вариант 13. На окружность радиуса R брошено две точки. Считая, что длина хорды – случайная величина с равномерным распределением, найти плотность распределения вероятностей длины дуги между брошенными точками.

Вариант 14. Угол сноса самолета определяется формулой

$$\alpha=\arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\varepsilon\right),$$

где ε – угол действия ветра, u – скорость ветра, v – скорость самолета в воздухе. Значения угла действия ветра распределены равномерно в интервале $(-\pi,\pi)$. Найти плотность распределения вероятностей угла сноса при $u=20$ м/с, $v=720$ км/ч.

Вариант 15. У центробежного регулятора стороны равны и составляют так называемый "параллелограмм" регулятора, острый угол φ этого параллелограмма – случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(\pi/6, \pi/4)$. Найти закон распределения диагоналей параллелограмма регулятора.

Вариант 16. Случайная величина X распределена по закону

$$F(x)=\begin{cases}e^{-x^{-\alpha}} & \text{при } x\ge 0\ (\alpha>0),\\ 0 & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Найти закон $F(y)$ распределения случайной величины $Y=1/X$.

Вариант 17. Какому функциональному преобразованию надо подвергнуть случайную величину X, распределенную равномерно в интервале $(0,\pi)$, чтобы получить случайную величину Y, распределенную по закону Коши

$$f(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}\ ?$$

Вариант 18. Случайная величина X – измеренное значение стороны квадрата – распределена по закону

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin x & \text{при } x\in(0,\pi)\\ 0 & \text{при } x\notin(0,\pi).\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(y)$ площади квадрата.

Вариант 19. Абсолютное значение случайной величины V – скорости молекулы массы газа при абсолютной температуре T – подчиняется закону Максвелла-Больцмана

$$f(v)=\alpha v^2\exp(-\beta v^2),\ (0\le v<\infty),$$

где $\beta=\frac{m}{2kT}$, k – константа Больцмана, α – нормирующий множитель. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ кинетической энергии $E=\frac{1}{2}mv^2=\gamma v^2$, где $\gamma=\frac{1}{2}m$. Показать, что $\alpha=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\beta^{3/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}$.

Вариант 20. Найти плотность распределения вероятностей коэффициента усиления $Z = X/Y$, если X и Y – независимые случайные величины, распределенные по законам

$$f(x) = \frac{1}{a}, \ x \in (0,a); \quad f(y) = e^{-y}, \ y > 0,$$

где X – сигнал на выходе, Y – сигнал на входе усилителя.

Вариант 21. На вход усилителя подается сигнал X, на его выходе снимается сигнал Y. Найти плотность распределения вероятностей коэффициента усиления $K = Y/X$, если X и Y – независимые случайные величины, распределенные по закону Релея

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-x^2/2a^2}, \ x > 0; \quad f(y) = \frac{y}{a^2} e^{-y^2/2a^2}, \ y > 0.$$

Вариант 22. По сторонам прямого угла XOY скользит линейка AB длиной ℓ, занимая случайное положение, причем все значения X одинаково вероятны от 0 до ℓ. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния R от начала координат до линейки.

Вариант 23. Затраты C на обслуживание приборов обратно пропорциональны сроку их службы t, т.е. $C = 1/t$. Найти закон распределения случайной величины C, если закон распределения t нормальный:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Вариант 24. Имеются две случайные величины Y и X, связанные соотношением $Y = 4 - 3X$. Величина X распределена по закону равномерной плотности на интервале (–1, 3). Найти математическое ожидание и дисперсию величины Y, корреляционный момент величин X и Y и их коэффициент корреляции.

Вариант 25. Случайные величины U и V связаны со случайными величинами X и Y соотношениями

$$U = X + 3Y - 2; \quad V = 2X - Y + 1.$$

Известно, что $MX = 1$; $DX = 2$; $MY = -2$; $DY = 4$; $K_{xy} = 3$. Найти математические ожидания величин U и V, их корреляционную матрицу.

Вариант 26. На смежных сторонах прямоугольника со сторонами a и b выбраны наудачу две точки. Найти математическое ожидание квадрата расстояния между этими точками, а также его дисперсию.

Вариант 27. Имеется случайная величина X, распределенная по экспоненциальному закону

$$f(x) = 2e^{-2x}, \ x > 0.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию случайных величин $Y = -2X$; $Z = X + Y - 1$; $U = X - 2Y - Z + 1$.

Вариант 28. Точка находится на окружности радиуса R. Радиус-вектор этой точки проектируется на полярную ось, и на этой проекции, как на стороне, строится квадрат. Определить математическое ожидание и дисперсию площади квадрата, если положение точки в любом месте окружности равновозможно.

Вариант 29. На плоскости с координатами (X, Y) дана случайная точка, причем $MX = 2$; $DX = 16$; $MY = 4$; $DY = 64$; $K_{xy} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния от начала координат до проекции точки на ось OZ, лежащую в плоскости XOY и образующую с осью OX угол $\alpha = 30^\circ$.

Вариант 30. Через точку $B = (0, b)$ проводится прямая BA под углом α к оси ординат. Причем $A = (a, 0)$. Все значения угла α равновероятны на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Найти плотность распределения вероятностей абсциссы "a" точки A.

Задача № 4

Вариант 1. Математическое ожидание числа солнечных дней в году для определенной местности равно 150 дням. Найти вероятность того, что в данном году здесь будет не менее 200 солнечных дней. Что можно сказать о вероятности того, что число солнечных дней в году будет не более 100 дней? Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение числа солнечных дней равно 10?

Вариант 2. Математическое ожидание годового количества осадков для данной местности равно 600 мм. Каково минимальное количество осадков за год с вероятностью, не превосходящей величины 0,8?

Вариант 3. Математическое ожидание скорости ветра у земли в данной местности составляет 8 км/ч. Найти вероятность того, что скорость ветра превысит 20 км/ч и что она будет меньше 50 км/ч. Как изменятся искомые вероятности, если будет известно, что среднее квадратичное отклонение скорости ветра равно 2 км/ч?

Вариант 4. Ежегодная потребность в электроэнергии для научно-исследовательского института составляет в среднем 500 кВт·ч. Какой расход электроэнергии можно ожидать во вторник с вероятностью не менее 0,85? Как изменится ответ задачи, если будет известно, что значение среднего квадратичного отклонения ежегодного расхода электроэнергии составит 50 кВт·ч?

Вариант 5. Математическое ожидание скорости ветра на высоте 10 км равно 30 км/ч, а среднее квадратичное отклонение 5 км/ч. Какую скорость ветра на этой высоте можно ожидать с вероятностью не меньшей 0,85?

Вариант 6. Генератор обеспечивает выходное напряжение, которое может отклоняться от номинального на значение, не превышающее 1 В, с вероятностью 0,95. Какие значения дисперсии выходного напряжения можно ожидать?

Вариант 7. Математическое ожидание суточного расхода воды в лаборатории составляет 10 м^3. Оценить вероятность того, что в некоторый день расход воды будет находиться в интервале 8 - 12 м^3. Как изменится искомая вероятность, если среднее квадратичное отклонение суточного расхода составит 1 м^3?

Вариант 8. Используя неравенство Чебышева, найти вероятность того, что частота появления грани с номером 6 при бросании правильной игральной кости 200 раз отклонится от вероятности ее появления не более чем на 0,1. Найденный ответ сравнить с результатом, полученным с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Вариант 9. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота появления грани с четным номером при бросании правильной игральной кости отклонится от вероятности ее появления по абсолютной величине не более чем на 0,01, если будет произведено 1000 испытаний. Сравнить найденные значения с результатами, полученными с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Вариант 10. Произведено 200 измерений некоторой случайной величины. Известно, что дисперсия измерения для каждой случайной величины не превосходит 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превзойдет 0,2.

Вариант 11. Чтобы определить среднее сопротивление $n-p$ перехода транзистора, в партии из 50 одинаковых коробок проверено по одному транзистору из каждой коробки. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического значения сопротивления $n-p$ перехода в выбранной совокупности от среднего арифметического значения во всей партии не превзойдет 10 Ом, если среднее квадратичное отклонение значения сопротивления $n-p$ перехода не превышает 6 Ом.

Вариант 12. За значение некоторой величины принимают среднее арифметическое 500 измерений. Предполагая, что среднее квадратичное отклонение возможных результатов каждого измерения не превосходит 0,5, оценить вероятность того, что отклонение найденного таким образом значения величины от истинного не превосходит 0,2.

Вариант 13. Каждая повторная передача сигнала по каналу связи увеличивает вероятность искажения сигнала на 0,1%. При передаче 1-го сигнала эта вероятность равна 0,05. Передано 100 сигналов. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9 заключено число переданных без искажения сигналов.

Вариант 14. В конденсаторе с вероятностью 0,01 возможен дефект диэлектрика и, независимо от первого, с вероятностью 0,005 - дефект корпуса. Проверена партия в 1000 конденсаторов. В каких границах с вероятностью 0,997 заключается число бракованных конденсаторов? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Вариант 15. В Москве рождается каждый день в среднем 335 детей, т.е. в год около 122 500 детей. Считая вероятность рождения мальчика 0,51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число девочек не менее чем на 1 500.

Вариант 16. Изнашивание орудия при стрельбе таково, что каждый следующий выстрел уменьшает вероятность попадания в цель в 0,999 раз. Произведено 100 выстрелов. Вероятность поражения при 1-м равна 0,9. В каком интервале с вероятностью 0,9 будет заключено число попаданий?

Вариант 17. Стрелок поражает мишень с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах число попаданий будет не менее 85 и не более 95?

Вариант 18. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$P(\xi_n=x_n)$	$1/2^n$	$1-1/2^{n-1}$	$1/2^n$

Можно ли применить к этой последовательности закон больших чисел?

Вариант 19. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
$P(\xi_n=x_n)$	$1/2n^2$	$1-1/n^2$	$1/2n^2$

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 20. Дана последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$. Случайная величина ξ_n задана следующим образом:

x_n	$-\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$
$P(\xi_n = x_n)$	1/2	1/2

Можно ли применить к данной последовательности закон больших чисел?

Вариант 21. Правильная монета 1000 раз бросается вверх. Определить такое число X, чтобы с вероятностью 0,6 количество попыток, когда монета ляжет гербом вверх, заключалось между 400 и X.

Вариант 22. 80% изготовленных заводом электроламп выдерживают гарантийный срок службы. Найти вероятность того, что в партии из 500 электроламп число выдержавших гарантийный срок службы находится в пределах $440 \div 480$.

Вариант 23. Вероятность случайного события равна 0,9. Выполнено 6400 испытаний. Какова вероятность, что наблюдаемая частота случайных событий лежит в интервале $0{,}9 \pm 0{,}01$? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Вариант 24. Вероятность случайного события равна 0,81. Выполнено 5000 испытаний. В каком интервале с вероятностью $P \geqslant 0{,}97$ лежит наблюдаемая частота случайного события? Решить задачу, используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Вариант 25. Вероятность случайного события равна 0,67. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью $P \geqslant 0{,}98$ можно было ожидать, что наблюдаемая частота случайного события отклонится от его вероятности не более чем на 0,01? Решить задачу двумя способами: используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Муавра-Лапласа.

Вариант 26. Изнашивание станка при изготовлении некоторых деталей таково, что производство каждой такой детали уменьшает вероятность выпуска детали высшего сорта на 1%. Определить с вероятностью, не меньшей чем 0,8, число деталей высшего сорта в партии из 200 деталей, изготовленных на данном станке, если вероятность того, что первая из них высшего сорта, равна 0,95.

Вариант 27. Стрельба по цели ведется поочередно из трех

орудий, причем вероятности попадания в цель равны соответственно 0,2; 0,3 и 0,5. Таким образом произведено 300 выстрелов. Оценить "снизу" вероятность того, что при этих данных частота попаданий отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более чем на 0,1.

Вариант 28. Из 4 000 проведенных испытаний в 500 испытаниях вероятность появления ожидаемого результата равна 0,4; в 1200 испытаниях равна 0,5 и в 2 300 испытаниях равна 0,6. Найти границы, в которых должна находиться частота появления ожидаемого результата, если это необходимо гарантировать с вероятностью 0,98.

Вариант 29. Пусть ξ_1 – число выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты, а ξ_2 – число выпавших очков при бросании игральной кости. Оценить вероятность осуществления неравенства $\xi_1 + \xi_2 < 14$. Решить задачу, используя первую и вторую формы неравенства Чебышева.

Вариант 30. Пусть вероятность того, что покупателю обувного магазина необходимы туфли размера 41, равна 0,15. Определить (в %) верхнюю и нижнюю границы предполагаемого количества покупателей, которым нужны такие туфли, среди 2 000 покупателей магазина, если вероятность нахождения искомой цифры между верхней и нижней границей составит 0,98.

Задача № 5

Вариант 1. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка измерения которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением 10 м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с абсолютной погрешностью не более 5 м при доверительной вероятности 90%?

Вариант 2. Расстояние от места измерения до навигационного знака оценивают средним арифметическим результатов независимых измерений данного расстояния, выполненных дальномерами в количестве n шт. Измерения не содержат систематической ошибки и производятся каждым дальномером 1 раз, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении расстояния до навигационного знака с вероятностью 0,9 не превышала 10 м?

Вариант 3. До наладки станка была проверена точность изготовления 10 втулок и оценено значение дисперсии диаметра втулок ($\hat{\sigma}_1^2$ = 5,7 мк^2), которое характеризует точность станка. После наладки станка контролировалось еще 15 втулок и получено новое значение оценки дисперсии $\hat{\sigma}_2^2$ = 9,6 мк^2. Есть ли основания считать, что в результате наладки станка точность изготовления на нем деталей не снизилась? Проверку гипотезы осуществлять на уровне значимости α = 0,1 в предположении, что ошибка изготовления распределена по нормальному закону.

Вариант 4. В результате проведенных испытаний получены (в м/с) следующие значения начальной скорости снаряда: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 423,0. Определить точные оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения начальной скорости, а также построить для указанных параметров 90%-ные доверительные интервалы, считая распределение начальной скорости нормальным.

Вариант 5. Среднее арифметическое значение расстояния между двумя геодезическими пунктами, полученное по данным обработки 9 независимых измерений, составляет 3 000 м. Значения ошибки дальномерного устройства подчинены нормальному закону распределения и характеризуются средним квадратичным отклонением 30 м. Построить для истинного расстояния между пунктами 90%-ный доверительный интервал.

Вариант 6. При определении прочности стержня на разрыв испытывались 8 образцов. В результате испытаний получены следующие значения усилия разрыва (в кг): 500; 510; 545; 600; 560; 530; 525; 540. Требуется определить доверительные интервалы уровня γ = 0,95 для среднего значения прочности и ее среднего квадратичного отклонения σ, если закон распределения прочности нормальный.

Вариант 7. Средняя квадратичная ошибка измерения угла теодолитом составляет 7″. Сколько независимых измерений следует произвести, чтобы с вероятностью γ = 0,95 гарантировать измерение угла с ошибкой, по абсолютной величине не превышающей 5″? Предполагается, что ошибки измерений распределены по нормальному закону.

Вариант 8. До замены кварца в радиопередатчике произведено 10 замеров несущей частоты, в результате чего была найдена оценка среднего квадратичного отклонения $\hat{\sigma}_1$ = 0,045 кГц. После замены кварца произведено еще 8 замеров частоты и вычислена оценка среднего квадратичного отклонения $\hat{\sigma}_2$ = = 0,02 кГц. Есть ли основания полагать, что смена кварца привела к уменьшению разброса несущей частоты? Гипотезу проверить при уровне значимости α = 0,1 в предположении, что несущая частота распределена по нормальному закону.

Вариант 9. С помощью 5 секундомеров, позволяющих производить измерения со средним квадратичным отклонением 0,15 м/с, найдены такие значения времени вывода космического аппарата на орбиту (в м/с) 425,5; 425,3; 426,1; 425,7; 425,9. Полагая, что ошибки измерения секундомеров подчинены нормальному закону распределения, построить 90%-ный доверительный интервал для истинного времени вывода аппарата на орбиту.

Вариант 10. Оценка дисперсии $\hat{\sigma}_x^2$, полученная путем обработки результатов 8 независимых наблюдений нормально распределенной случайной величины X, равна 1,28. С какой вероятностью можно утверждать, что среднее значение X заключено в интервале (25–37,4), если середина этого интервала совпадает с выборочным средним значением X?

Вариант 11. В результате 16 испытаний инерционного звена определены такие значения статистических характеристик постоянной времени:

$$\hat{m}_t = 120{,}1 \text{ с}, \quad \hat{\sigma}_t^2 = 9{,}64 \text{ с}^2.$$

Полагая закон распределения случайной величины нормальным, построить для параметров m_t и σ_t доверительные интервалы, отвечающие доверительным вероятностям γ_1 = 0,95 и γ_2 = 0,90.

Вариант 12. Среднее значение дальности до ориентира, полученное по результатам 10 независимых измерений, равно 3 230 м. Среднее квадратичное отклонение ошибки измерения дальномера составляет 8 м. Найти 95%-ный доверительный интервал для дальности до ориентира.

Вариант 13. Для исследования стабильности температуры в термостате, в который помещается кварцевый генератор, с интервалом в 15 часов проведены две серии замеров температуры t, °С, результаты которых отражены в табл. 1.

Таблица 1

Серия	Замер 1	2	3	4	5	6
1-я	17,86	17,98	18,01	18,2	17,9	18,00
2-я	18,01	17,98	18,05	17,9	18,00	–

Проверить гипотезу о неизменности температуры в термостате, если точность измерения температуры характеризуется средним квадратичным отклонением σ = 0,1 °С, случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону распределения и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вариант 14. Две партии стальной проволоки изготовлены в разные смены. По результатам испытаний на разрыв 10 образцов 1-й партии и 6 образцов 2-й партии получены выборочные значения средней прочности соответственно 234 Н и 247 Н. Можно ли считать, что средняя прочность проволоки 2-й партии выше, если среднее квадратичное отклонение прочности для обеих партий равна 10 Н, а закон распределения прочности принимается нормальным? Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.

Вариант 15. Для классификации электроизмерительного прибора произведено 9 замеров эталонного источника напряжения, в результате чего получена оценка среднего квадратичного отклонения измеряемой величины $\tilde{\sigma}_1 = 0{,}1$ В. Измерение этого же напряжения стандартным прибором 15 раз дало оценку среднего квадратичного отклонения $\tilde{\sigma}_2 = 0{,}09$ В. Считая, что систематические ошибки измерения отсутствуют, а случайные ошибки подчинены нормальному закону распределения, проверить гипотезу о принадлежности обоих приборов одному классу точности, который характеризуется величиной среднего квадратичного отклонения. (Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.)

Вариант 16. По 15 независимым равноточным измерениям рассчитаны оценки математического ожидания $\tilde{m}_V = 427{,}7$ м/с и среднего квадратичного отклонения максимальной скорости самолета $\tilde{\sigma}_V = 8{,}7$ м/с. Определить: 1) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при доверительной вероятности 0,9; 2) вероятности, с которыми можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении m_V и σ_V не превзойдет 2 м/с. (Считать, что выборка принадлежит нормальной совокупности.)

Вариант 17. Плотность распределения вероятности отказов радиоэлектронной аппаратуры для времени τ между последовательными отказами задана формулой $f(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$, $t \geq 0$, где T – математическое ожидание случайной величины τ, в теории надежности параметр T носит название "средняя наработка на отказ". Для оценки параметра T провели испытания n образцов радиоэлектронной аппаратуры до появления d отказов. Общая продолжительность S работы с начала испытания до последнего отказа для n образцов оказалась равной 1600ч. Определить границы доверительного интервала для параметра T по результатам опыта при таких данных: доверительная вероятность $\gamma = 0{,}8$; количество отказов $d = 5$. Воспользоваться тем, что величина $2S/T$

имеет χ^2-распределение с $\nu = 2d$ степенями свободы.

Вариант 18. Произведен запуск 5 однотипных ракет, в результате которого получены (в км) такие значения дальности их полета: 692,9; 695,7; 691,3; 693,6; 649,9. После доработки одного из блоков двигательной установки этого типа ракет запущены еще 4 ракеты, значения дальности полета которых (в км) таковы: 691,2; 696,2; 693,7; 695,4.

Проверить гипотезу (с уровнем значимости $\alpha = 0{,}1$) о том, что доработка двигательной установки не привела к увеличению средней дальности полета ракет, предполагая, что рассеяние дальности не изменилось после доработки.

Вариант 19. Расстояние между двумя объектами определяется с помощью гамма-дальномера, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением 10 м. С интервалом 12 мин проведено 2 серии измерений, результаты которых даны в табл. 2. Предполагается, что ошибка измерения подчиняется нормальному закону распределения.

Таблица 2

Серия	Кол-во измерений	Средний арифметический результат измерений, м
1-я	5	832
2-я	3	840

Можно ли объяснить расхождение между средними результатами измерений каждой серии малым числом измерений или есть основания полагать, что за время между сеансами дистанция между объектами увеличилась? ($\alpha = 0{,}05$.)

Вариант 20. На основании 200 отсчетов было установлено, что в среднем для выполнения операции требуется 1,5 мс, а оценка среднего квадратичного отклонения времени операции равна 2,1 мс. Полагая, что время операции подчиняется нормальному закону распределения, определить доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения времени операции, отвечающих доверительным вероятностям 0,95 и 0,90 соответственно.

Вариант 21. Из партии ракет с известной характеристикой рассеяния по дальности действия $\sigma = 1{,}6$ км испытывается 10 образцов, хранившихся длительный срок в полевых условиях. Есть ли основания полагать, что в результате хранения в полевых условиях у этих ракет рассеяние по дальности действия возросло, если в результате испытаний получена оценка $\tilde{\sigma} = 3{,}4$ км? (Принять уровень значимости $\alpha = 0,05$.)

Вариант 22. В результате пусков 10 ракет получены (в км) такие значения боковых отклонений точек попадания от точки прицеливания (табл. 3).

Таблица 3

№ ракеты	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значение отклонения	1,0	0,2	1,0	–0,1	–0,5	5,0	–1,0	3,0	0,5	1,0

Необходимо оценить среднее значение бокового отклонения и построить для него 99%-ный доверительный интервал, считая случайное отклонение нормально распределенным.

Вариант 23. Давление в баке с горючим измерено 8 раз манометром. Результаты измерений зафиксированы в табл. 4.

Таблица 4

№ измерения	1	2	3	4	5	6	7	8
Давление, Па	3,25	2,82	3,07	3,12	2,93	2,87	3,09	3,17

Полагая ошибки измерений подчиненными нормальному закону распределения, определить по этим результатам оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения давления в баке, а также построить для этих оценок 90%-ный доверительный интервал.

Вариант 24. При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратичным отклонением 0,2 В, произведено 10 измерений напряжения бортовой батареи. Среднее арифметическое результатов измерения, имеющих нормальный закон распределения, составляет 50,2 В. Найти интервал, который с вероятностью 0,95 "накроет" истинное значение напряжения батареи.

Вариант 25. Расстояние от станции слежения до точки падения ракеты определяется тремя различными способами: радиотехническим, акустическим и фототеодолитным. Средние квадратичные отклонения измерений этими способами равняются 120 м, а результаты измерений, имеющих нормальный закон распределения, равны 10500, 10700 и 10800 м соответственно. Найти значение оценки расстояния от станции слежения до точки падения ракеты, а также среднее квадратичное отклонение этой оценки, характеризующее точность ее определения с доверительной вероятностью $\gamma = 0,9$.

Вариант 26. По результатам 25 измерений скорости V получена оценка дисперсии $\hat{\sigma}_V^2 = 5,8$ м^2/с^2. Построить 90%-ный

доверительный интервал для неизвестных величин – дисперсии σ_V^2 и среднего квадратичного отклонения σ_V, считая величину V распределенной по нормальному закону.

Вариант 27. Оценка дисперсии нормально распределенной ошибки измерения гиротеодолита, вычисленная в результате обработки 20 измерений азимута неизвестного ориентировочного направления, оказалась равной 20 с^2. Найти доверительный интервал для дисперсии, отвечающий доверительной вероятности $\gamma = 0,8$.

Вариант 28. Построить 90%-ный доверительный интервал для вероятности попадания снаряда в цель, если после 220 выстрелов в цель попало 75 снарядов.

Вариант 29. В результате 15 независимых измерений давления в топливном баке найдена оценка дисперсии давления, равная 0,2 Па. Построить доверительный интервал для дисперсии, если математическое ожидание значения давления неизвестно, а доверительная вероятность $\gamma = 0,8$.

Вариант 30. Точность манометра характеризуется средним квадратичным отклонением 1 Па. В результате пятикратного измерения давления в пневмосистеме ракеты было определено среднее арифметическое значение давления, равное 150 Па. После шестимесячного хранения ракеты давление в пневмосистеме вновь трижды замерялось, в результате чего было определено среднее арифметическое значение, равное 148 Па. Проверить гипотезу о неизменности давления в пневмосистеме ракеты за время ее хранения. Считать, что случайные погрешности подчиняются нормальному закону распределения. Уровень значимости $\alpha = 0,05$.

Часть II. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ДЗ

Глава 1. Случайные события (ДЗ, задачи № 1, 2)

§ 1. Вероятностное пространство

Исходными в теории вероятностей являются понятия случайного эксперимента, случайного события и вероятности случайного события.

Эксперимент называется случайным, если его исход нельзя предсказать заранее.

Для математической формализации задач в теории вероятностей вводится понятие вероятностного пространства, которое в дальнейшем будем обозначать (Ω, F, P). Рассмотрим каждую из компонент вероятностного пространства:

1) Ω – пространство элементарных событий, т.е. событий, представляющих собой неразложимый исход случайного эксперимента. Обозначим элементарное событие через ω_i. В этом случае $\Omega = \{\omega_i\}$.

Пример. Монета подбрасывается до тех пор, пока не ляжет гербом вверх. Найти пространство элементарных событий данного случайного эксперимента.

Решение. Обозначим элементарный исход, состоящий в выпадении герба, буквой Г, а исход, заключающийся в выпадении решки – буквой Р. Тогда пространством элементарных событий этого эксперимента является множество $\Omega = \{Г, РГ, РРГ, РРРГ, \ldots\}$. Здесь, например, РРГ обозначает элементарный исход, состоящий в выпадении 2 раза решки, а потом герба.

2) $\mathcal{F}$ – булева алгебра, т.е. совокупность подмножеств пространства Ω, включающая в себя это пространство, а также пустое множество и замкнутая относительно конечного или счетного числа операций объединения и дополнения. Любой элемент $A \in \mathcal{F}$, являющийся подмножеством Ω $(A \subset \Omega)$, в теории вероятностей носит название случайного события.

3) $P = P(A)$ – вероятность события A, которая является количественной мерой реализации случайного события A и удовлетворяет таким условиям (аксиомам):

$$0 \le P(A) \le 1; \quad P(\Omega) = 1; \quad A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Если задано пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_i, \ldots\}$ с конечным или счетным числом элементарных исходов, при этом каждому элементарному исходу ω_i приписана некоторая вероятность $P(\omega_i)$, то $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$.

Если пространство элементарных событий Ω содержит конечное число n элементарных исходов, имеющих одну и ту же вероятность $P(\omega_i) = 1/n$, то вероятность события $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_m}\}$ определяется по формуле $P(A) = m/n$.

Методы подсчета чисел m и n будут даны в § 3 гл. 1. Приведенное выше выражение для $P(A)$ носит название классического определения вероятности события, при этом обычно под m понимается число элементарных исходов, благоприятных для события A, а под n – общее число равновозможных элементарных исходов в заданном эксперименте.

§ 2. Алгебра событий

В основе распространенного в настоящее время теоретико-множественного метода изложения теории вероятностей лежит взаимосвязь теоретико-множественных и вероятностных понятий.

В табл.5 показывается взаимосвязь теоретико-множественных и вероятностных понятий.

Таблица 5

Обозначение	Язык теории множеств	Язык теории вероятностей
Ω	Универсальное множество	Пространство элементарных событий (элементарных исходов эксперимента)
ω	Элемент Ω	Элементарное событие
A	Некоторое множество элементов ω	Случайное событие (если $\omega \in A$, то говорят, что наступило событие A)
Ω	Множество всех ω	Достоверное событие
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$A \subset B$	A есть подмножество B	Из наступления события A необходимо следует наступление события B
$A \cup B$	Объединение множеств A и B	Событие, состоящее в том, что произошло A или B
$A \cap B$	Пересечение множеств A и B	Событие, состоящее в том, что произошло и B, и A
$A \cap B = \varnothing$	A и B – непересекающиеся множества	A и B – несовместные события

§ 3. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, занимающийся подсчетом числа подмножеств, которые можно образовать из данного конечного множества.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами, k-е действие – n_k способами, то все k действий могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ способами.

Пример 1. Из города А в город В можно добраться самолетом, поездом и автомобилем, а из города B в город C – катером или самолетом. Каково число возможных комбинаций средств передвижения для путешествия из города A в город C через город B ?

Решение. Выберем один из трех возможных вариантов путешествия из A в B . Далее можно продолжить путешествие двумя видами транспорта. Поэтому общее число комбинаций различных средств передвижения подсчитаем так: $3 \cdot 2 = 6$.

Классическая задача комбинаторики – это задача о числе выборок, которая формулируется так: сколькими способами можно выбрать m из n различных элементов заданного множества?

Когда порядок элементов в выборе несуществен, выборка называется сочетанием, в противном случае – размещением. В зависимости от того, возвращается или нет выбранный элемент в заданное множество, различают выборки с повторением или без повторения.

В некоторых задачах можно нагляднее представить выборку m из n различных элементов заданного множества как распределение m элементов в n различных ячейках.

В табл. 6 отражается связь между выборками и распределениями, а также приведены формулы для подсчета их числа.

Примечания: 1. "Эн факториал" ($n!$) определяется так: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, при этом, по определению, $0! = 1$.

2. Размещения без повторения для случая $n = m$ носят название перестановки n элементов.

Пример 2. В урне n последовательно пронумерованных шаров. По одному с возвращением извлекается m шаров. Определить вероятность того, что ни разу не будет извлечен шар с одним и тем же номером.

Решение. Поскольку равновероятно, что будет вынут любой шар, то задачу можно решить с помощью классического определения вероятности события по формуле $P = M/N$, где M – число выборок, в которых не повторяется ни один из номеров; N – общее число выборок m элементов из множества, содержащего n элементов. Так как все шары пронумерованы, то для числа благоприятных исходов мы имеем дело с упорядоченной выборкой без возвращения, а для общего числа – с возвращением. Из табл. 6 определяем: $M = A_n^m$, $N = n^m$ и, окончательно, $P = A_n^m / n^m$.

Ответ: С вероятностью A_n^m / n^m не будет ни разу извлечен шар с повторяющимся номером.

Таблица 6

	Число распределений m элементов в n различных и неупорядоченных ячейках		
	Элементы различимы и неупорядочены	Элементы неразличимы	
Без ограничений	Размещения с повторениями: $\tilde{A}_n^m = n^m$	Сочетания с повторениями: $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$	С возвращением
В ячейку попадает не более одного элемента	Размещения без повторений: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdots (n-m+1)$	Сочетания без повторений: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Без возвращения
	Упорядоченный выбор	Неупорядоченный выбор	
	Число способов выбора m элементов из множества с n различными элементами		

Пример 3. В партии из 100 электроламп есть 8 бракованных. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных 10 электроламп 3 окажутся бракованными?

Решение. Поставленную задачу решим с помощью классического определения вероятности события по формуле $P = M/N$.

Общее число исходов N определяется как количество неупорядоченных выборок без возвращения объема в 10 элементов из совокупности, которая содержит 100 элементов. Согласно табл. 6 число $N = C_{100}^{10}$. Чтобы найти число благоприятных исходов, воспользуемся принципом умножения, согласно которому M определяется как произведение числа всевозможных способов выбора 7 качественных ламп из совокупности, которая содержит 92 лампы, на число способов выбора 3 некачественных ламп из совокупности, которая содержит 8 ламп. Каждый из этих сомножителей определяется через число сочетаний из 92 по 7 и из 8 по 3. Таким образом, $M = C_{92}^7 \cdot C_8^3$. Вероятность искомого события $P = C_{92}^7 \cdot C_8^3 / C_{100}^{10}$.

Ответ. Вероятность того, что в выборке из 10 ламп 3 будут бракованными, равна $C_{92}^3 C_8^3 / C_{100}^{10} = 4{,}5\cdot 10^{-6}$.

§ 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема умножения вероятностей. Пусть $A_1, A_2, \dots A_n$ – случайные события, определенные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Тогда $\boxed{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_2A_1)\dots P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)}$,

где $P(A_2/A_1)$ – вероятность события A_2 при условии, что событие A_1 имело место; $P(A_n/\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$ – вероятность события A_n при условии, что имели место события $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$.

Если события A_i независимы, то $\boxed{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)}$.

Если хотя бы два события несовместны, т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$, то $P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 0$.

Теорема сложения вероятностей. Пусть $A_1, A_2, \dots A_n$ – случайные события, определенные на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P), тогда вероятность осуществления хотя бы одного события

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).}$$

В частном случае взаимно несовместных событий $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, $\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$.

Пример. В урне находятся 15 зеленых, 10 красных и 5 синих шаров. Из нее последовательно извлекаются 3 шара. Найти вероятность того, что все они будут различного цвета. Решить задачу для двух случаев: 1) выбранный шар возвращается обратно в урну; 2) выбранный шар в урну не возвращается.

Решение. Введем такие обозначения:

A_i – событие, состоящее в том, что i-й шар – зеленого цвета;
B_i – событие, состоящее в том, что i-й шар – красного цвета;
C_i – событие, состоящее в том, что i-й шар – синего цвета;
D – событие, состоящее в том, что все вынутые шары – разного цвета.

Тогда $D = (A_1 \cap B_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap C_3) \cup (B_1 \cap C_2 \cap A_3) \cup$
$\cup (A_1 \cap C_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (C_1 \cap B_2 \cap A_3)$.

Поскольку событие D выражает объединение несовместных событий, то $P(D) = P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + \dots + P(C_1 \cap B_2 \cap A_3)$.

Для 1-го случая $P(A_i \cap B_j \cap C_k) = P(A_i)P(B_j)P(C_k)$,

поскольку выбранный шар возвращается в урну и, следовательно, события A_i, B_j, C_k являются независимыми. Отсюда

$$P(D) = 6\,\frac{15}{15+10+5}\cdot\frac{10}{15+10+5}\cdot\frac{5}{15+10+5} = \frac{6\cdot 750}{30^3} = \frac{1}{6}.$$

Для 2-го случая $P(A_i \cap B_j \cap C_k) = P(A_i)P(B_j/A_i)P(C_k/A_i \cap B_j) = 0{,}185$.

Ответ. Вероятность того, что все вынутые шары будут разного цвета, для случая, когда выбранный шар возвращается в урну, равна 1/6, а когда выбранный шар не возвращается в урну, равна 0,185.

§ 5. Формулы полной вероятности Байеса и Бернулли

Определение. Множество случайных событий $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ образует полную группу событий, если:

1) $H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n = \Omega$;
2) $H_i \cap H_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$.

Формула полной вероятности. Если $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ – полная группа событий и $P(H_i) > 0 \ \forall i = 1,2,\dots n$, то для любого случайного события A справедливо равенство

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).} \qquad (1)$$

Пример 1. Среди 30 экзаменационных билетов 20 "счастливых". Студенты подходят за билетами один за другим. У кого больше вероятность взять "счастливый" билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

Решение. Для первого студента вероятность взять "счастливый" билет равна 20/30 = 2/3.

Пусть A – событие, состоящее в том, что второй студент взял "счастливый" билет. Сделаны два предположения:

H_1 – первый студент взял "счастливый" билет, $P(H_1) = \frac{2}{3}$;
H_2 – 1-ый второй студент взял "несчастливый" билет, $P(H_2) = \frac{1}{3}$.

По формуле полной вероятности

$$P(A) = \frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29} + \frac{1}{3}\cdot\frac{20}{29} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. Вероятность взять "счастливый" билет у обоих студентов одинакова.

Формула Байеса. Пусть $\{H_1, H_2, \dots H_n\}$ – полная группа событий, B – некоторое событие, определенное на том же пространстве элементарных событий, что и H_i, причем $P(B)>0$, т.е. известно, что событие B произошло. Кроме того, известны вероятности $P(H_i)$ и $P(B/H_i)$. Тогда

$$P(H_i/B)=P(B/H_i)P(H_i)/\sum_{i=1}^{n}P(B/H_i)P(H_i). \qquad (2)$$

События H_i обычно называют гипотезами, B интерпретируют как результат опыта для проверки гипотез, $P(H_i)$ – как априорные (доопытные) вероятности гипотез, $P(H_i/B)$ – как апостериорные вероятности гипотез, изменившиеся в результате получения новой информации, обусловленной появлением события B.

Пример 2. В урне находится n шаров, среди которых есть белые. Наугад взятый шар оказался белым. Определить наиболее вероятное число белых шаров в урне, если предварительно предполагается равновероятным любой состав шаров в урне.

Решение. Пусть H_i – гипотеза, состоящая в том, что в урне находится i белых шаров ($i\in\{0,1,2,\dots n\}$); B – событие, состоящее в том, что наугад взятый шар оказался белым. При этом $P(H_i)=1/(n+1)$ $\forall i=\overline{0,n}$; $P(B/H_i)=i/n$, тогда по формуле Байеса

$$P(H_i/B)=\frac{i/n(n+1)}{\sum\limits_{k=0}^{n}(k/n(n+1))}=\frac{2i}{n(n+1)}.$$

Таким образом, наиболее вероятной гипотезой является H_n.

Ответ. Наиболее вероятное число шаров в урне – n.

Повторные испытания. Схема Бернулли. Схемой независимых повторных испытаний, или схемой Бернулли, называют последовательность испытаний, удовлетворяющую таким условиям:

1) в каждом испытании возможны лишь два исхода – появление либо некоторого события A ("успеха"), либо события $\bar{A}$ ("неуспеха");

2) исход каждого испытания не зависит от исходов предыдущих, т.е. различные исходы являются независимыми событиями;

3) вероятность каждого "успеха" одна и та же в каждом испытании, обозначим ее p, тогда $P(\bar{A})=1-p=q$.

Вероятность появления в n испытаниях по схеме Бернулли ровно k "успехов" определяется по формуле Бернулли

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (3)$$

Следствием формулы Бернулли является выражение, определяющее вероятность $P_n(k_1\le\xi\le k_2)$, где ξ – число "успехов" в n испытаниях по схеме Бернулли; k_1 и k_2 – заданные целые числа:

$$P_n(k_1\le\xi\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

(4)

Пример 3. Вероятность попадания бомбы в цель равна 0,25. Сбрасываются последовательно 8 бомб. Найти вероятность того, что будет:

1) не менее семи попаданий;

2) хотя бы одно попадание.

Решение. 1) Требуется определить $P_8(7\le\xi)$. Используя формулу (4), получим

$$P_8(\xi\ge 7)=\sum_{k=7}^{8}P_n(k)=C_8^7\left(\frac{1}{4}\right)^7\cdot\frac{3}{4}+C_8^8\left(\frac{1}{4}\right)^8=\frac{8\cdot 3}{4^8}+\frac{1}{4^8}\simeq 0{,}0004.$$

2) Требуется определить $P_8(1\le\xi)$. На основании формулы (4) получаем

$$P_8(1\le\xi)=\sum_{k=1}^{8}P_n(k)=1-P_n(0)=1-C_8^0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^8=1-\left(\frac{3}{4}\right)^8\simeq 0{,}9.$$

Ответ. 1) Вероятность не менее семи попаданий равна 0,0004; 2) вероятность хотя бы одного попадания равна 0,9.

Пример 4. Сколько раз нужно бросить игральный кубик, чтобы вероятность $P_{\text{тр}}$ появления хотя бы одной "шестерки" была не менее 0,9?

Решение. Обозначим через n искомое число опытов, а через ξ – число появления "шестерки" в n опытах. Вероятность "успеха" в одном опыте $p=\frac{1}{6}$. По условию задачи требуется, чтобы

$$P_n(1\le\xi)\ge P_{\text{тр}}.$$

Но на основании формулы (4)

$$P_n(1\le\xi)=1-P_n(0)=1-q^n\ge P_{\text{тр}}\Rightarrow n\ge\frac{\ln(1-P_{\text{тр}})}{\ln q}=\frac{\ln 0{,}1}{\ln 5/6}=12{,}6.$$

Ответ. Нужно не менее 13 раз бросить кубик.

Глава II. Случайные величины (ДЗ, задачи № 3, 4)

§ 1. Функциональные преобразования случайных величин

Закон распределения функции одного аргумента. Пусть задана функциональная зависимость между случайными величинами X и Y

$$Y=\varphi(X), \qquad (5)$$

причем плотность распределения X равна $f_1(x)$.

Требуется найти плотность распределения $f_2(y)$ случайной величины Y.

Если $\varphi(x)$ – монотонная функция на множестве значений X, то решение дает формула

$$f_2(y)=f_1[\psi(y)]\cdot|\psi'(y)|, \tag{6}$$

где $\psi(y)$ – обратная функция к функции $y=\varphi(x)$.

Если $\varphi(x)$ – кусочно-монотонная функция, то весь промежуток изменения X разбиваем на конечное число n промежутков $(J_1,\dots J_k,\dots J_n)$, на каждом из которых функция $y=\varphi_k(x)$ является монотонной, где $\varphi_k(x)=\varphi(x)$ при $x\in J_k$, $k=\overline{1,n}$.

После определения функций $\varphi_k(x)$ и обратных к ним функций $\psi_k(y)$ ответ дает формула

$$f_2(y)=\sum_{k=1}^{n} f_1[\psi_k(y)]\cdot|\psi'_k(y)|. \tag{7}$$

Закон распределения функций нескольких аргументов. Ограничимся рассмотрением функций двух случайных аргументов X и Y, т.е. будем рассматривать функциональную зависимость

$$Z=\varphi(X,Y). \tag{8}$$

Функция распределения $F_3(z)$ случайной величины Z определяется выражением

$$F_3(z)=P(Z<z)=P[\varphi(X,Y)<z]=\iint_{D_z} f(x,y)\,dx\,dy, \tag{9}$$

где $f(x,y)$ – двумерная плотность распределения случайного вектора (X,Y); D_z – область на плоскости XOY, для которой $\varphi(X,Y)<z$.

Зная $F_3(z)$, плотность распределения $f_3(z)$ случайной величины Z, дифференцированием находим $f_3(z)=F_3'(z)$.

Рассмотрим в качестве $\varphi(X,Y)$ некоторые конкретные функции. Пусть $\varphi(X,Y)=X+Y$, т.е. $Z=X+Y$. Тогда

$$F_3(z)=\iint_{(X+Y<z)} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)\,dx,$$

откуда плотность распределения

$$f_3(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\,dy. \tag{10}$$

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, то формула (10) предстанет в виде

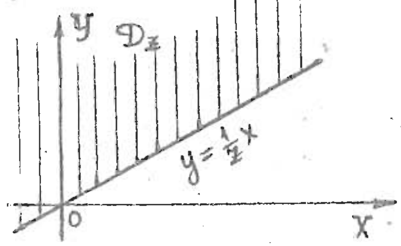
$$f_3(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(z-y)f_2(y)\,dy, \tag{11}$$

причем плотность распределения $f_3(z)$ в этом случае будет называться композицией законов распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$.

Пусть $\varphi(X,Y)=X/Y$, т.е. $Z=X/Y$. Тогда область

$$D_z=\{X/Y<z\}=\{X<zY\}$$

принимает вид, представленный на рисунке, и, следовательно,



$$F_3(z)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{x/z}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{zy}f(x,y)\,dx,$$

откуда

$$f_3(z)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(zy,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{z^2}f\left(x,\frac{x}{z}\right)dx. \tag{12}$$

§ 2. Числовые характеристики случайных величин

Скалярные случайные величины. Пусть $Y=\varphi(X)$ – функция случайного аргумента $X\in R=(-\infty,\infty)$ с плотностью распределения $f(x)$. Тогда, по определению, математическим ожиданием, или средним значением Y, называется число, которое обозначается MY и определяется равенством

$$MY=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)\,dx. \tag{13}$$

Математическое ожидание характеризует центр рассеяния возможных значений случайной величины Y.

Дисперсией DY случайной величины Y называется среднее значение квадрата разности $Y-MY$, т.е.

$$DY=M(Y-MY)^2. \tag{14}$$

Исходя из общей формулы (13) формулу для расчета DY для непрерывной случайной величины можно записать в форме

$$DY=\int_{-\infty}^{\infty}(y-MY)^2f(y)\,dy, \tag{15}$$

а формулу (14) – в таком эквивалентном виде:

$$DY=MY^2-(MY)^2. \tag{16}$$

Здесь вычислить MY^2, в соответствии с (13), можно по формуле

$$MY^2=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(y)\,dy. \tag{17}$$

Среднее квадратичное отклонение Y определяется равенством

$$\sigma_y=\sqrt{DY}. \tag{18}$$

Векторные случайные величины. Ограничимся рассмотрением двумерных случайных векторов (X,Y). Корреляционный момент компонент X и Y случайного вектора (X,Y)

$$K_{xy}=M[(X-MX)(Y-MY)]. \qquad (19)$$

Коэффициентом корреляции ρ_{xy} компонент X и Y случайного вектора (X,Y) называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратичных отклонений этих компонент:

$$\rho_{xy}=K_{xy}/\sigma_x\cdot\sigma_y. \qquad (20)$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, причем $|\rho_{xy}|\le 1$. Показатель ρ_{xy} служит для оценки близости связи между X и Y к линейной зависимости: чем ближе $|\rho_{xy}|$ к единице, тем ближе зависимость между X и Y к функциональной связи $Y=aX+b$, где a и b – любые числа.

Если случайные величины X и Y независимы [т.е. $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$], то и $\rho_{xy}=0$ (т.е. они некоррелированы). Обратное, вообще говоря, неверно.

Свойства числовых характеристик. Свойства математического ожидания:

1) $M(C)=C$ при $C=const$;
2) $M(\sum a_iX_i+b)=\sum a_i MX_i+b$;
3) $M(XY)=MX\cdot MY+K_{xy}$.

Свойства дисперсии:

1) $D(C)=0$ при $C=const$;
2) $D(CX)=C^2DX$;
3) $D(\sum a_iX_i+b)=\sum a_i^2DX_i+2\sum\limits_{i<j}a_ia_jK_{ij}$.

Типовые задачи и их решение

Пример 1. Плотность распределения случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0\end{cases} \quad (\lambda>0).$$

Найти плотность распределения случайной величины $Y=\ln X$.

Решение. Функция $Y=\ln X$ монотонна в интервале $(0,\infty)$, поэтому возможно применение формулы (6). Решение задачи представим в виде двух столбцов: слева – общие обозначения, справа – конкретные функции для данной задачи:

$f_1(x)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0;\end{cases}$	$\psi'(y)$	e^y;
$y=\varphi(x)$	$y=\ln x$;	$f_2(y)$	$\lambda e^{-\lambda e^y}\cdot e^y$,
$x=\psi(y)$	$x=e^y$.		$y\in(-\infty,\infty)$.

Ответ. Плотность распределения случайной величины $f_2(y)=\lambda e^{-\lambda e^y}\cdot e^y$ при $y\in(-\infty,\infty)$.

Пример 2. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-a,a)$. Найти плотность распределения случайной величины $Y=X^2$.

Решение. Функция $Y=X^2$ немонотонная в интервале $(-a,a)$, поэтому нужно использовать формулу (7). Для этого разобьем интервал $(-a,a)$ на два участка монотонности функции $Y=X^2$: $J_1=(-a,0)$ и $J_2=(0,a)$. Для участков J_1 и J_2 найдем: 1) функцию, обратную заданной: $x_1=-\sqrt{y}$, $x_1\in J_1$ и $x_2=\sqrt{y}$, $x_2\in J_2$; 2) модули их производных: $|\psi_1'(y)|=|\psi_2'(y)|=1/2\sqrt{y}$. Учитывая, что по условию

$$f_1(x)=\begin{cases}1/2a, & x\in(-a,a)\\ 0, & x\notin(-a,a),\end{cases}$$

получаем окончательный результат по формуле (7):

$$f_2(y)=\sum_{k=1}^{n}f_1[\psi_k(y)]|\psi_k'(y)|=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2a}\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2a\sqrt{y}},\ y\in(0,a^2).$$

Ответ. Плотность распределения случайной величины Y

$$f_2(y)=\begin{cases}1/2a\sqrt{y} & \text{при } y\in(0,a^2);\\ 0 & \text{при } y\notin(0,a^2).\end{cases}$$

Пример 3. Случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью $Y=5-3X$. Известно, что $MX=2$, $DX=4$. Найти среднее значение и стандартное отклонение величины Y, а также коэффициент корреляции между X и Y.

Решение. Руководствуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, находим:

$$MY=M(5-3X)=5-3MX=-1;$$
$$DY=D(5-3X)=9\cdot DX=36 \Rightarrow \sigma_y=\sqrt{DY}=6.$$

Чтобы определить коэффициент корреляции $\rho=K_{xy}/\sigma_x\sigma_y$, найдем корреляционный момент K_{xy}:

$$K_{xy}=M[(X-2)(Y+1)]=M[(X-2)(6-3X)]=M[12X-3X^2-12]=$$
$$=12MX-3MX^2-12=12-3MX^2.$$

Но $MX^2 = DX + (MX)^2 = 8$, откуда $K_{xy} = -12$.

Следовательно, $\rho = (-12)/2\cdot 6 = -1$, как и должно быть, поскольку X и Y связаны линейно.

Ответ. $MY=-1$; $\sigma_y = 6$; $\rho = -1$.

Пример 4. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $U = 1-3X+Y-2Z$, если $\rho_{xy}=0,5$; $\rho_{xz}=-0,2$; $\rho_{yz}=0,4$, а средние значения X, Y, Z и их дисперсии равны соответственно 2; 10; 5 и 4; 9; 16.

Решение. Предварительно найдем корреляционные моменты компонент случайного вектора (X,Y,Z):

$$K_{xy}=0,5\cdot 2\cdot 3=3;\quad K_{xz}=-0,2\cdot 2\cdot 4=-1,6;\quad K_{yz}=0,4\cdot 3\cdot 4=4,8.$$

Среднее значение U не зависит от корреляции X, Y, Z, т.е.

$$MU = 1-3MX+MY-2MZ=-5.$$

Дисперсия U рассчитывается с учетом корреляции:

$$DU=(-3)^2DX+DY+(-2)^2DZ+(-3)\cdot 1\cdot K_{xy}+(-3)(-2)K_{xz}+1\cdot(-2)K_{yz}=100.$$

Ответ. $MU=-5$; $DU=100$.

§ 8. Закон больших чисел. Предельные теоремы

Напомним основные теоретические сведения, необходимые для решения задачи № 4 ДЗ.

Обобщенное неравенство Чебышева. Пусть $g(x)$ – неотрицательная неубывающая на множестве значений случайной величины ξ функция. Предположим, что существует $Mg(\xi)$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$

$$P\{\xi>\varepsilon\}\le Mg(\xi)/g(\varepsilon).$$

Частными случаями обобщенного неравенства Чебышева являются:

первая форма неравенства Чебышева:

$$P\{\xi>\varepsilon\}\le M\xi/\varepsilon \quad \text{при} \quad g(x)=x;$$

вторая форма неравенства Чебышева:

$$P\{|\xi-M\xi|>\varepsilon\}\le D\xi/\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad g(x)=x^2.$$

Пример 1. Математическое ожидание начальной скорости снаряда равно 500 м/с. Какова вероятность того, что возможное значение начальной скорости снаряда будет не менее 800 м/с?

Решение. Воспользуемся первой формой неравенства Чебышева и, полагая $M\xi = 500$, $\varepsilon = 800$, получим

$$P\{\xi>800\}\le\frac{500}{800}=\frac{5}{8}.$$

Ответ. Искомая вероятность не превышает значения 5/8.

Пример 2. Математическое ожидание температуры внутри отсека искусственного спутника земли равно 20 °С, а среднее квадратичное отклонение равно 3 °С. Какие значения температуры внутри отсека можно ожидать с вероятностью не менее 0,9?

Решение. Используя вторую форму неравенства Чебышева

$$P\{|\xi-M\xi|>\varepsilon\}\le\frac{D\xi}{\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\{|\xi-M\xi|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D\xi}{\varepsilon^2},$$

получим

$$P\{|\xi-20|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{9}{\varepsilon^2}=0,9 \Rightarrow \varepsilon^2=90 \Rightarrow \varepsilon\simeq 9,5,$$

следовательно,

$P\{|\xi-20|<9,5\}\ge 0,9$ или $P\{10,5<\xi<29,5\}\ge 0,9$, т.е. с требуемой вероятностью $\xi\in(10,5;\ 29,5)$.

Ответ. Ожидаемые с вероятностью не менее 0,9 значения температуры в отсеке искусственного спутника земли лежат в интервале (10,5 °С; 29,5 °С).

Закон больших чисел. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность случайных величин. Принято говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ, если $\forall\varepsilon>0,\ \exists \lim P\{|\xi_n-\xi|>\varepsilon\}=0$. Сходимость по вероятности последовательности $\{\xi_n\}$ к случайной величине ξ обозначается в таком виде: $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$.

Примечание. Эквивалентное условие сходимости по вероятности последовательности $\{\xi_n\}$ к случайной величине ξ таково:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\lim_{n\to\infty}P\{|\xi_n-\xi|<\varepsilon\}=1.$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность случайных величин, для которых существуют $M\xi_i$.

Законом больших чисел называются теоремы, устанавливающие условия, при которых справедливо такое утверждение:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\xi_i.$$

Теорема Чебышева. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии $D\xi_i$. Тогда достаточное условие выполнения закона больших чисел выразится в такой форме:

$$D\xi_i\le C,\quad \forall i=1,2,\dots n.$$

Теорема Маркова. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность зависимых случайных величин. Тогда достаточное условие выполнения закона больших чисел выразится так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = 0.$$

Теорема Хинчина. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если существует $M\xi_i = M < \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - M\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Бернулли. Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления некоторого события равна p, причем $0 < p < 1$. Обозначим частоту появления этого события в данной серии m/n. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|p - \frac{m}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Очевидно, что теорема Бернулли является частным случаем теоремы Чебышева.

Теорема Пуассона (обобщение теоремы Бернулли). Пусть проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления некоторого события равна p_k, $k = 1, 2, \dots n$; $0 < p_k < 1$ и пусть m – число появлений этого события в серии из n испытаний. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Примечание. В соответствии со второй формой неравенства Чебышева

$$\forall \varepsilon > 0, \ P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k\right| > \varepsilon\right\} \le M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right]^2 / \varepsilon^2.$$

Если $\{\xi_k\}$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих ограниченную дисперсию, то

$$\forall \varepsilon > 0, \ P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum^{n} M\xi_k\right| > \varepsilon\right\} \le \sum^{n} D\xi_k / \varepsilon^2 n^2 \le C/\varepsilon^2 n.$$

Пример 3. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Распределение случайной величины задано таким образом:

ξ_k	$-5k$	0	$5k$
$P(\xi_k)$	$\frac{1}{3k^2}$	$1 - \frac{1}{3k^2}$	$\frac{1}{3k^2}$

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Решение. Проверим возможность применения закона больших чисел на основании теоремы Чебышева. Для этого надо проверить, существует ли для любого k такая постоянная C, для которой справедливо неравенство $D\xi_k < C$.

Вычислим $D\xi_k$ по формуле

$$D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2;$$

$$M\xi_k = -5k\frac{1}{3k^2} + 0\left(1 - \frac{2}{3k^2}\right) + 5k\frac{1}{3k^2} = 0;$$

$$M\xi_k^2 = (-5k)^2\frac{1}{3k^2} + 0\left(1 - \frac{2}{3k^2}\right) + (5k)^2\frac{1}{3k^2} = \frac{25}{3} + \frac{25}{3} = \frac{50}{3};$$

$$D\xi_k = 50/3.$$

Отсюда следует, что существует постоянная C, равная, например, 50/3, такая что дисперсия $D\xi_k \le C$ для любого k. Следовательно, к данной последовательности применима теорема Чебышева, которая является достаточным условием закона больших чисел.

Ответ. К данной последовательности можно применить закон больших чисел.

Пример 4. Чтобы определить среднюю продолжительность горения электроламп, в партии из 200 одинаковых ящиков взяли на проверку по одной электролампе из каждого ящика. Оценить "снизу" вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения электроламп во всей партии по абсолютной величине меньше чем на 5 часов, если известно, что среднее квадратичное отклонение продолжительности горения электроламп в каждом ящике меньше 7 часов.

Решение. Пусть ξ_i – случайная величина, значение которой равно продолжительности горения электролампы, взятой из i-го ящика. Поскольку $D\xi_i < C = 49$, то возможно применение достаточного условия закона больших чисел в форме теоремы Чебышева.

Используем закон больших чисел и вторую форму неравенства Чебышева. Отсюда

$$P\left(\left|\frac{1}{200}\sum^{200}\xi_i - \frac{1}{200}\sum^{200} M\xi_i\right| < 5\right) \ge 1 - \frac{49}{200 \cdot 25} = 0{,}9902.$$

Ответ. Искомая вероятность будет не менее 0,9902.

Пример 5. Изнашивание станка при некоторых видах работ таково, что производство каждой детали уменьшает вероятность выпуска детали высшего сорта на 1%. Что можно сказать, основываясь на теореме Пуассона, с вероятностью не меньшей 0,8, о числе деталей высшего сорта в партии из 100 штук, которая изготовлена на одном станке, если вероятность выпуска первой детали высшим сортом равна 0,9?

Решение. Из условия следует, что вероятность выпуска i-й детали по 1-му сорту $P_i = 0,9(0,99)^{i-1}$. Тогда

$$\bar{P} = \frac{1}{n}\sum^{100} P_i = \frac{1}{100}\underbrace{\sum^{100} 0,9(0,99)^{i-1}} = \frac{0,9}{100}\cdot\frac{1-(0,99)^{100}}{1-0,99} = 0,57.$$

Дисперсия числа деталей высшего сорта

$$D\xi = \sum^{100} P_i(1-P_i) = \sum^{100} 0,9\cdot 0,99^{i-1}\left[1-0,9(0,99)^{i-1}\right] =$$

$$= 0,9\,\frac{1-(0,99)^{100}}{1-0,99} - (0,9)^2\,\frac{1-(0,99)^{200}}{1-(0,99)^2} = 21,39.$$

Используя теорему Пуассона, имеем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,57\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{21,39}{\varepsilon^2\cdot 100^2} = 0,8,$$

отсюда

$$\varepsilon^2 = \frac{21,39}{0,2\cdot 100^2} = 0,0107;\quad \varepsilon = 0,103;\quad |m-57| < 10,3;\quad P(46,7 < m < 67,3) \geq 0,8.$$

Ответ. С вероятностью не менее 0,8 можно утверждать, что число деталей высшего сорта в данной партии заключено в пределах 47–67 шт.

Центральная предельная теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность случайных величин. Центральная предельная теорема устанавливает условия асимптотической сходимости (при $n \to \infty$) величины $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ к нормальному распределению.

Теорема Ляпунова для одинаково распределенных случайных величин. Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения, с математическим ожиданием $M\xi_i = \mu$ и дисперсией $D\xi_i = \sigma^2$, то функция распределения случайной величины $\zeta = \frac{1}{n}\sum^{n}\xi_i$ сходится по вероятности к $N(M\zeta, D\zeta)$, где $N(M\zeta, D\zeta)$ – нормальный закон распределения, а $M\zeta = M\xi_i = \mu$, $D\zeta = \frac{1}{n}D\xi_i = \frac{\sigma^2}{n}$ – параметры этого закона.

Следствие 1 (интегральная теорема Муавра–Лапласа). Пусть производится серия из n независимых испытаний, в каж-

дом из которых вероятность появления некоторого события равна p (при $0<p<1$). Пусть m/n – частота появления этого события в серии из n испытаний, тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\alpha < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < \beta\right\} = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$.

Пример 6. С конвейера сходит в среднем 85% изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы отклонение частоты появления изделий 1-го сорта от вероятности 0,85 по абсолютной величине не превышало 0,01 с вероятностью 0,997?

Решение. В задаче дано: $p = 0,85$; $q = 1 - 0,85 = 0,15$; $\varepsilon = 0,01$; $P_T = 0,997$; $n = ?$ Воспользуемся соотношением

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1.$$

Поскольку нам известно значение P_T, то для определения ε решим уравнение $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 0,997 \Rightarrow \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \approx 3$ или

$$n \simeq \frac{0,85\cdot 0,15\cdot 3^2}{(0,01)^2} = 11475.$$

Ответ. Необходимо взять примерно 11475 изделий.

Глава III. Математическая статистика (ДЗ, задача № 5)

В задаче № 5 ДЗ отражены два раздела математической статистики: построение доверительных интервалов для неизвестных параметров и проверка гипотез о средних значениях и дисперсиях.

§ 1. Доверительные интервалы для параметров закона распределения случайной величины

Одна из основных задач математической статистики – оценка неизвестных параметров закона распределения по измерениям $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины X (измерения получены в результате эксперимента). Обозначим неизвестный параметр буквой θ. Если, например, закон распределения X – нормальный, то его параметрами являются среднее значение μ и стандартное отклонение σ (т.е. $\theta_1 = \mu$, $\theta_2 = \sigma$). Коэффициент корреляции ρ тоже является параметром (в двумерном нормальном законе распределения) и т.д.

Приближенное значение параметра θ, найденное по выборочным значениям $x_1, x_2, \dots, x_n$ случайной величины (или генеральной совокупности) X, называется его точечной оценкой, или просто оценкой. Обозначается оно буквой $\hat{\theta}$.

Недостаток точечных оценок состоит в том, что при малом числе наблюдений n (при $n<10$) погрешность точечных оценок $|\hat{\theta}-\theta|$ может быть весьма существенной, но она совсем не определяется величиной $\hat{\theta}$. Чтобы охарактеризовать точность оценки $\hat{\theta}$, можно использовать ее дисперсию $D\hat{\theta}$. Однако более удобно для этой цели использовать доверительный интервал $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, границы которого (нижняя $\hat{\theta}_1$ и верхняя $\hat{\theta}_2$) определяются по выборочным значениям $x_1, x_2, \dots, x_n$. Доверительный интервал $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ "накрывает" величину θ с заданной вероятностью (называемой доверительной) γ:

$$P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = \gamma, \qquad (21)$$

где $\gamma = 0{,}9 \div 0{,}99$. При этом длина интервала $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1 = 2\varepsilon$ характеризует точность определения θ, а вероятность γ – достоверность определения.

Обычно рассматривают симметричные (относительно оценки $\hat{\theta}$) доверительные интервалы $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = (\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon)$, причем ε выбирают так, чтобы выполнялось условие (21). Его теперь можно записать в виде $P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=\gamma$. Далее будем использовать такое обозначение:

$$J_\gamma(\theta) = (\hat{\theta}-\varepsilon, \hat{\theta}+\varepsilon) = (\underline{\theta}, \bar{\theta}).$$

Общее правило построения доверительного интервала для любого неизвестного параметра θ (которое является приближенным) основано на центральной предельной теореме Ляпунова, согласно которой оценка $\hat{\theta}$ при больших значениях n ($n > 50$) имеет нормальный закон распределения со средним $M\hat{\theta} = \theta$ и дисперсией $D\hat{\theta}$.

Обозначим через $z_{1-\alpha/2}$ квантиль нормального распределения уровня $1-\alpha/2$, где $\alpha = 1-\gamma$, т.е. такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(x)$, при котором $\Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. Тогда

$$P(|\hat{\theta}-\theta| < z_{1-\alpha/2}\sqrt{D\hat{\theta}}) = 2\Phi(z_{1-\alpha/2}) - 1 = \gamma, \qquad (22)$$

т.е. доверительный интервал $J_\gamma(\theta)$ для параметра θ определяется по формуле

$$J_\gamma(\theta) \approx \hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{D\hat{\theta}}. \qquad (23)$$

Таким образом, чтобы применить формулу (23), нужно лишь знать оценку $\hat{\theta}$ и ее дисперсию $D\hat{\theta}$. Например, если $\theta = \mu = MX$, то $\hat{\theta} = \bar{x}$ и $D\hat{\theta} = s^2/n$, а если $\theta = \sigma = \sqrt{DX}$, то $\hat{\theta} = s$ и $D\hat{\theta} = \frac{2s}{n-1}$, где $\bar{x}$ и s – выборочные оценки, которые определяются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \qquad s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}. \qquad (24)$$

<u>Точные доверительные интервалы для параметров нормального закона распределения</u>. Пусть наблюдаемая случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами μ и σ (напомним, что $\mu = MX$, $\sigma^2 = DX$), что условно запишется так: $X \sim N(\mu, \sigma)$.

<u>Случай 1</u>. Параметр σ известен. Тогда оценка $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ и, следовательно, $P(|\bar{x}-\mu| < z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \gamma$, т.е. доверительный интервал

$$J_\gamma(\mu) = \bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \qquad (25)$$

<u>Случай 2</u>. Параметр σ неизвестен. Тогда случайная величина $u = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. По таблицам этого распределения при заданных значениях $n-1$ и $1-\alpha/2$ можно найти квантиль $t_{1-\alpha/2}$ уровня $1-\alpha/2$, при котором $P(|\frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n}| < t_{1-\alpha/2}) = \gamma$, откуда следует, что доверительный интервал

$$J_\gamma(\mu) = \bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}. \qquad (26)$$

При $n > 20$ $t_{1-\alpha/2} \approx z_{1-\alpha/2}$, а формулы (25) и (26) дают одинаковый ответ.

<u>Случай 3</u>. Параметры μ и σ неизвестны. Нужно найти $J_\gamma(\sigma^2)$ и $J_\gamma(\sigma)$. Воспользуемся тем, что случайная величина $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ имеет χ^2-распределение ("хи-квадрат" распределение) с $n-1$ степенью свободы. По таблицам этого распределения при заданных значениях $n-1$ и $\alpha = 1-\gamma$ можно найти значения $\chi^2_{\alpha/2}$ и $\chi^2_{1-\alpha/2}$ – квантили этого распределения

уровней $\alpha/2$ и $1-\alpha/2$, при которых

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha = \gamma,$$

откуда несложными алгебраическими преобразованиями получаем следующее:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}\right) = P\left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}} < \sigma < S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}}}\right) = \gamma.$$

Таким образом, доверительные интервалы $J_\gamma(\sigma^2)$ и $J_\gamma(\sigma)$ определяются так:

$$J_\gamma(\sigma^2) = \left(S^2\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}},\ S^2\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}}\right); \qquad (27)$$

$$J_\gamma(\sigma) = \left(S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2}}},\ S\sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2}}}\right). \qquad (28)$$

Типовые задачи и их решение

Пример 1. По результатам испытаний на прочность 4 образцов стальных стержней получены такие значения разрывных усилий (в Н): $x_1 = 300$, $x_2 = 310$, $x_3 = 330$ и $x_4 = 340$.

Найти доверительные интервалы уровня $\gamma = 0,9$ для средней прочности и ее среднее квадратичное отклонение, считая, что закон распределения X – нормальный.

Решение. По формуле (24) находим точечные оценки μ и σ:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = 320, \quad S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2} = 18,25.$$

По таблицам распределения Стьюдента для $\alpha = 1-\gamma$ и $n-1=3$ находим, что $t_{1-0,05} = 2,35$, а по таблицам χ^2-распределения при $n-1=3$, $\alpha/2 = 0,05$ и $1-\alpha/2 = 0,95$ находим, что $\chi^2_{0,05}(3) = 0,35$ и $\chi^2_{0,95}(3) = 7,8$.

Подставим найденные значения в формулы (26) и (28), тогда $J_{0,9}(\mu) = 320 \pm 21,4$ и $J_{0,9}(\sigma) = (11,3;\ 53,3)$.

Пример 2. На лабораторных весах, систематическая ошибка которых равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением 10 мг, определяется допустимая величина примеси. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы погрешность взвешивания не превышала 5 мг с вероятностью 0,9?

Решение. Пусть a – масса примеси. Тогда результат i-го взвешивания $x_i = a + \delta_i$, $(i = 1,2,\dots,n)$, где по условию случайная

ошибка $\delta_i \sim N(a,\sigma)$, а следовательно, $x_i \sim N(a,\sigma)$ для любого $i = 1,2,\dots,n$, причем значение σ известно ($\sigma = 10$).

Если проведено n независимых измерений $x_1, x_2, \dots, x_n$, то их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$ в соответствии с формулой (25) удовлетворяет условию

$$P\left(|\bar{x} - a| < z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

По условию задачи погрешность $\varepsilon = z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ не должна превышать $\varepsilon_0 = 5$ мг с вероятностью $1-\alpha = \gamma = 0,9$, т.е. $z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \varepsilon_0$, откуда $n \ge z^2_{1-\alpha/2}\sigma^2/\varepsilon_0^2$.

Ответ. При $\gamma = 0,9$ $z_{1-\alpha/2} = 1,65$ и $n \ge \frac{1,65^2 \cdot 10^2}{5^2} \approx 11$.

§ 2. Проверка статистических гипотез

Под статистической гипотезой понимается любое предположение о свойствах закона распределения случайных величин.

Мы рассмотрим гипотезы о средних значениях и дисперсиях случайных величин X и Y предполагая, что $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ и $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

Проверка гипотезы о равенстве средних значений. Требуется проверить гипотезу $H_0: \mu_1 = \mu_2$ против конкурирующей гипотезы $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, имея n_1 выборочных значений $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ случайной величины X и n_2 выборочных значений $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ случайной величины Y.

В результате проверки гипотеза H_0 либо принимается (если она согласуется с результатами наблюдений), либо отклоняется (если им противоречит), и тогда принимается гипотеза H_1. Проверка любой гипотезы H_0 сопровождается ошибками двух типов: отклонить H_0, когда она верна (вероятность такой ошибки обозначают α и называют уровнем значимости), или принять H_0, когда верна H_1 (вероятность такой ошибки обозначают β).

Проверка гипотезы осуществляется в 3 этапа:

1) Выбирается так называемый критерий проверки T – некоторая функция от выборочных значений x_i и y_i, которая имеет один из стандартных законов распределения, если гипотеза H_0 верна.

2) Задается приемлемый уровень значимости α $(\alpha = 0,01 \div 0,2)$, по которому до опыта определяется критическая область K так, чтобы $P(T \in K \mid H_0) = \alpha$, а ошибка β была минимальной.

3) Вычисляется значение $T = T_0$ по данным конкретных

наблюдений и сравнивается с K. Если $T_0 \in K$, то гипотеза H_0 отклоняется (принимается H_1), если $T_0 \in \overline{K} = \mathcal{D}$ (где $\overline{K}$ – дополнение K), то гипотеза H_0 принимается.

Для проверки гипотезы $H_0: \mu_1 = \mu_2$ против гипотезы $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ выбирают в качестве критерия случайную величину

$$T = (\bar{x} - \bar{y}) \Big/ \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$$

(считать, что σ_1 и σ_2 известны). Если H_0 верна, то $T \sim N(0,1)$ и в качестве критической области K при $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ следует выбрать симметричную область $K = \{|T| > z_{1-\alpha/2}\}$. Если H_1 означает, что $\mu_1 > \mu_2$, то наилучшей будет критическая область $K = \{T > z_{1-\alpha}\}$; если H_1 означает, что $\mu_1 < \mu_2$, то следует выбрать $K = \{T < -z_{1-\alpha}\}$. Здесь $z_{1-\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha}$ – квантили нормального закона уровней $1-\alpha/2$ и $1-\alpha$ соответственно, α – заданный уровень значимости. После выбора K остается определить значение T_0 и сопоставить его с K.

Аналогично проверяется гипотеза $H_0: \mu = \mu_0$, но в качестве критерия принимают величину либо $T = (\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$ (при известном значении σ), либо $T = (\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}/S$ (при неизвестном σ).

Все возможные случаи проверки гипотезы сведены в табл. 7.

Пример 1. Давление в баке с горючим было измерено манометром 3 раза утром и 5 раз в полдень. Результаты измерений (в гПа) дали такие результаты: 3,05; 2,82; 3,12 (утром); 3,07; 2,93; 3,27; 3,09; 3,19 (в полдень). Есть ли основания считать, что давление повысилось, если ошибки измерения распределены нормально, а погрешность манометра характеризуется средним квадратичным отклонением, равным 0,1 (принято, что уровень значимости $\alpha = 0{,}1$)?

Решение. Проверим гипотезу $H_0: \mu_1 = \mu_2$ против гипотезы $H_1: \mu_2 > \mu_1$, где μ_1 – давление в баке утром, а μ_2 – давление в полдень. Вычислим средние арифметические измерений 1) утром, 2) в полдень:

$$1)\ \bar{x} = \frac{1}{3}(3{,}05 + 2{,}82 + 3{,}12) = 3{,}0;$$

$$2)\ \bar{y} = \frac{1}{5}(3{,}07 + 2{,}93 + 3{,}27 + 3{,}09 + 3{,}19) = 3{,}11.$$

При $\alpha = 0{,}1$ $z_{1-\alpha} = z_{0,9} = 1{,}28$, а $K = \{T > 1{,}28\}$. Тогда $T_0 = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} = -1{,}5$. Поскольку $|T_0| > z_{1-\alpha}$, т.е. $T_0 \in K$, то гипотезу H_0 следует отклонить и принять H_1.

Проверка гипотезы о равенстве дисперсий. Пусть $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, а $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, или $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, или $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

В качестве критерия T нужно выбрать отношение выборочных дисперсий S_1^2 и S_2^2. Критерий $T = S_1^2/S_2^2$, если $S_1^2 > S_2^2$, или $T = S_2^2/S_1^2$, если $S_2^2 > S_1^2$. Отношение выборочных дисперсий имеет распределение Фишера с ν_1 и ν_2 степенями свободы (где $\nu_1 = n_1 - 1$; $\nu_2 = n_2 - 1$; n_1 и n_2 – объемы выборок, по которым определены S_1^2 и S_2^2).

Поскольку $T > 1$, то принимаем, что критическая область $K = \{T > F_{1-\alpha/2}\}$, где $F_{1-\alpha/2}$ – квантиль F-распределения Фишера уровня $1-\alpha/2$, который определяется по приложению 4 при известных ν_1 и ν_2.

После выбора K остается определить $T = T_0$ и сравнить его с K.

Аналогично проверяется гипотеза $H_0: \sigma = \sigma_0$ (для ее проверки используется критерий $T = (n-1)S^2/\sigma^2$). Все возможные случаи сведены в табл. 8.

Таблица 7

Гипотезы H_0	Гипотезы H_1	Правило приемки H_0 при известном σ (или известных σ_1 и σ_2)	Правило приемки H_0 при неизвестном σ (или неизвестных σ_1 и σ_2; $\sigma_1 = \sigma_2$)
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\dfrac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{\sigma}\sqrt{n} < z_{1-\alpha/2}$	$\dfrac{\lvert\bar{x} - \mu_0\rvert}{S}\sqrt{n} < t_{1-\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} < z_{1-\alpha}$	$\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n} < t_{1-\alpha}$
$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$z_\alpha < \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$t_\alpha < \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\dfrac{\lvert\bar{x} - \bar{y}\rvert}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < z_{1-\alpha/2}$	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} < z_{1-\alpha}$	
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$z_\alpha < \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$	

Пример 2. Два завода выпускают измерительные приборы одного типа. По результатам контроля n_1 приборов 1-го завода ($n_1 = 11$) и n_2 приборов 2-го завода ($n_2 = 16$) получены оценки дисперсий их ошибок $S_1^2 = 0{,}2$ и $S_2^2 = 0{,}1$. Можно ли считать, что приборы 2-го завода более точные? (Принять уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.)

Решение. Проверим гипотезу $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против $H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. Значение критерия $T_0 = 0{,}2/0{,}1 = 2$. Табличное значение $F_{1-\alpha}$ при $\alpha = 0{,}1$, $\nu_1 = 10$ и $\nu_2 = 15$ равно 2,24. Так как $T_0 < F_{1-\alpha}$, то гипотезу H_0 следует принять, т.е. проведенных наблюдений недостаточно, чтобы различить качество приборов разных заводов.

Таблица 8

Гипотезы H_0	Гипотезы H_1	Число степеней свободы	Правило приемки
$\sigma = \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\nu = n-1$	$\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)\cdot S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}$
	$\sigma > \sigma_0$	$\nu = n-1$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}$
	$\sigma < \sigma_0$	$\nu = n-1$	$\chi^2_{\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$
$\sigma_1 = \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$	$\frac{\max(S_1^2, S_2^2)}{\min(S_1^2, S_2^2)} < F_{1-\alpha/2}$
	$\sigma_1 > \sigma_2$ или $\sigma_1 < \sigma_2$	$\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$	$\frac{\max(S_1^2, S_2^2)}{\min(S_1^2, S_2^2)} < F_{1-\alpha}$

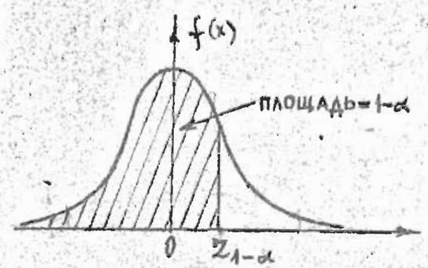
Примечание. Принятые в табл. 8 обозначения:

z_p – квантиль нормального распределения уровня p;

t_p – квантиль распределения Стьюдента с $\nu = n-1$ степенью свободы уровня p;

χ^2_p – квантиль "хи-квадрат" распределения с $\nu = n-1$ степенью свободы уровня p;

F_p – квантиль распределения Фишера с ν_1 и ν_2 степенями свободы уровня p.



$z_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$;

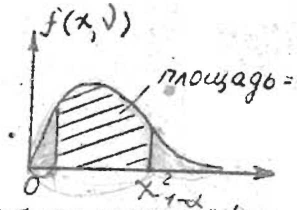
$z_{1-\alpha}$ – процентная точка уровня α.

Таблица квантилей (процентных точек) нормального закона распределений, или значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad P(X < z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha.$$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
1,00	0,8413	1,21	0,8869	1,42	0,9222	1,63	0,9484
1,01	0,8438	1,22	0,8883	1,43	0,9236	1,64	0,9495
1,02	0,8361	1,23	0,8907	1,44	0,9251	1,65	0,9505
1,03	0,8485	1,24	0,8925	1,45	0,9265	1,66	0,9515
1,04	0,8508	1,25	0,8944	1,46	0,9279	1,67	0,9525
1,05	0,8531	1,26	0,8962	1,47	0,9292	1,68	0,9535
1,06	0,8554	1,27	0,8980	1,48	0,9306	1,69	0,9545
1,07	0,8577	1,28	0,8997	1,49	0,9316	1,70	0,9554
1,08	0,8599	1,29	0,9015	1,50	0,9332	1,71	0,9564
1,09	0,8621	1,30	0,9032	1,51	0,9345	1,72	0,9573
1,10	0,8643	1,31	0,9049	1,52	0,9357	1,73	0,9582
1,11	0,8665	1,32	0,9066	1,53	0,9370	1,74	0,9591
1,12	0,8686	1,33	0,9082	1,54	0,9382	1,75	0,9599
1,13	0,8708	1,34	0,9099	1,55	0,9394	1,76	0,9608
1,14	0,8729	1,35	0,9115	1,56	0,9406	1,77	0,9616
1,15	0,8749	1,36	0,9131	1,57	0,9418	1,78	0,9625
1,16	0,8770	1,37	0,9147	1,58	0,9429	1,79	0,9633
1,17	0,8790	1,38	0,9162	1,59	0,9441	1,80	0,9641
1,18	0,8810	1,39	0,9177	1,60	0,9452	1,81	0,9649
1,19	0,8830	1,40	0,9192	1,61	0,9463	1,82	0,9656
1,20	0,8849	1,41	0,9207	1,62	0,9474	1,83	0,9664

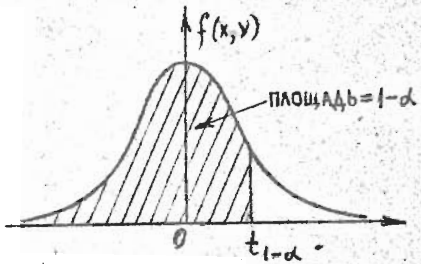
X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
1,84	0,9671	2,02	0,9783	2,36	0,9909	2,70	0,9965
1,85	0,9685	2,04	0,9793	2,38	0,9913	2,72	0,9967
1,86	0,9686	2,06	0,9803	2,40	0,9918	2,74	0,9969
1,87	0,9693	2,08	0,9812	2,42	0,9922	2,76	0,9971
1,88	0,9699	2,10	0,9821	2,44	0,9927	2,78	0,9973
1,89	0,9706	2,12	0,9830	2,46	0,9931	2,80	0,9974
1,90	0,9713	2,14	0,9838	2,48	0,9934	2,82	0,9976
1,91	0,9719	2,16	0,9846	2,50	0,9938	2,84	0,9977
1,92	0,9726	2,18	0,9854	2,52	0,9941	2,86	0,9979
1,93	0,9732	2,20	0,9861	2,54	0,9945	2,88	0,9980
1,94	0,9738	2,22	0,9868	2,56	0,9948	2,90	0,9981
1,95	0,9744	2,24	0,9875	2,58	0,9951	2,92	0,9982
1,96	0,9750	2,26	0,9881	2,60	0,9953	2,94	0,9984
1,97	0,9759	2,28	0,9887	2,62	0,9956	2,96	0,9985
1,98	0,9761	2,30	0,9893	2,64	0,9959	2,98	0,9986
1,99	0,9767	2,32	0,9898	2,66	0,9961	3,00	0,99865
2,00	0,9772	2,34	0,9904	2,68	0,9963		



$\chi^2_{1-\alpha}$ – квантиль уровня;
$\chi^2_{1-\alpha}$ – процентная точка уровня.

Таблица квантилей (процентных точек) распределения "хи-квадрат" в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α

ν	1-α			α		
	0,975	0,95	0,9	0,1	0,05	0,025
1	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024
2	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378
3	0,216	0,352	1,584	6,251	7,815	9,348
4	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,14
5	0,831	1,145	1,610	9,236	11,07	12,83
6	1,237	1,635	2,204	10,64	12,59	14,45
7	1,690	2,167	2,833	12,02	14,07	16,01
8	2,180	2,733	3,490	13,36	15,51	17,53
9	2,700	3,325	4,168	14,68	16,92	19,02
10	3,247	3,940	4,865	15,98	18,31	20,48
11	3,816	4,575	5,578	17,27	19,67	21,92
12	4,404	5,226	6,304	18,55	21,03	23,34
13	5,010	5,892	7,042	19,81	22,36	24,73
14	5,630	6,571	7,790	21,06	23,68	26,12
15	6,260	7,261	8,547	22,31	24,99	27,49
16	6,910	7,962	9,312	23,54	26,29	28,84
17	7,564	8,672	10,085	24,77	27,59	30,19
18	8,231	9,390	10,865	25,99	28,87	31,53
19	8,907	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85
20	9,590	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17
21	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48
22	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78
23	11,69	13,09	14,85	32,00	35,17	38,07
24	12,40	13,85	15,66	33,19	36,41	34,36
25	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65

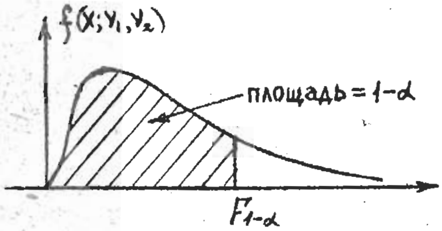


$t_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$;
$t'_{1-\alpha}$ – процентная точка уровня α.

Таблица квантилей (процентных точек) распределения Стьюдента в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности $1-\alpha$

ν	α					
	0,30	0,20	0,10	0,050	0,010	0,005
1	2	3	4	5	6	7
1	0,727	1,376	3,078	6,314	31,82	63,66
2	0,617	1,061	1,886	2,920	6,965	9,925
3	0,584	0,978	1,638	2,353	4,541	5,841
4	0,569	0,941	1,533	2,132	3,747	4,604
5	0,559	0,920	1,476	2,015	3,365	5,032
6	0,553	0,906	1,440	1,943	3,143	3,707
7	0,549	0,896	1,415	1,895	2,998	3,499
8	0,546	0,889	1,397	1,860	2,896	3,355
9	0,543	0,883	1,383	1,833	2,821	3,250
10	0,542	0,879	1,372	1,812	2,764	3,169
11	0,540	0,876	1,363	1,796	2,718	3,106
12	0,539	0,873	1,356	1,782	2,681	3,055
13	0,538	0,870	1,350	1,771	2,650	3,012
14	0,537	0,868	1,345	1,761	2,624	2,977
15	0,536	0,866	1,341	1,753	2,602	2,947
16	0,535	0,865	1,337	1,746	2,583	2,921
17	0,534	0,863	1,333	1,740	2,567	2,898
18	0,534	0,862	1,330	1,734	2,552	2,878
19	0,533	0,861	1,328	1,729	2,539	2,861
20	0,533	0,860	1,325	1,725	2,528	2,845
21	0,532	0,859	1,323	1,721	2,518	2,831
22	0,532	0,858	1,321	1,717	2,508	2,819
23	0,532	0,858	1,319	1,714	2,500	2,807
24	0,531	0,857	1,318	1,711	2,492	2,797
25	0,531	0,856	1,316	1,708	2,485	2,787
26	0,531	0,856	1,315	1,706	2,479	2,779
27	0,531	0,855	1,314	1,703	2,473	2,771
28	0,530	0,855	1,313	1,701	2,467	2,763
29	0,530	0,854	1,311	1,699	2,462	2,756
30	0,530	0,854	1,310	1,697	2,457	2,750

Приложение 4



$F_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$;
$F_{1-\alpha}$ – процентная точка уровня α.

Таблица квантилей (процентных точек) распределения Фишера в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 от вероятности $1-\alpha$

α = 0,05

ν_1	ν_2									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	25
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,39	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,744	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,756	4,534	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733

α = 0,01

ν_1	ν_2									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	25
1	4052,1	4999,0	5403,5	5625,1	5764,1	5859,4	5981,4	6105,8	6234,2	6366,5
2	98,495	99,008	99,167	99,247	99,305	99,325	99,365	99,425	99,464	99,504
3	34,117	30,815	29,459	28,709	28,236	27,910	27,489	27,053	26,597	26,122
4	21,200	18,001	16,693	15,978	15,521	15,208	14,800	14,374	13,930	13,464
5	16,258	13,274	12,059	11,391	10,966	10,672	10,266	9,888	9,467	9,019
6	13,744	10,924	9,779	9,149	8,746	8,465	8,101	7,718	7,313	6,880
7	12,246	9,546	8,452	7,846	9,460	7,191	6,840	6,469	6,074	5,650
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,631	6,371	6,029	5,667	5,279	4,859
9	10,561	8,022	6,992	6,423	6,057	5,802	5,467	5,111	4,730	4,311
10	10,044	7,560	6,552	5,994	5,636	5,386	5,057	4,706	4,327	3,909
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,004	3,668	3,294	2,869
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,666	3,363	3,031	2,659	2,210

Оглавление